数理解析研究所講究録
226 巻 1975 年 82-85

多変数の Schwarz 微分について

東大・大学院　織田 孝幸

Schwarzの微分はよく知られているように，一次分数変換 $z'=\frac{az+b}{cz+d}$ を特徴づけさらに一次分数変換 に関してある種の不変性をもっている．E. Picard は二変数の一次分数変換についても同様なものを考えることができることを示した．実は Picard が考えた微分は本質的に projective connection と一致することは容易な計算でわかる．以下ではもっと一般に，既約な有界対称領域の自己同型として表われる分数変換についても Schwarz の微分の類似物を構成することが，わりに簡単にできることを示す．

さて D を既約有界対称領域とする．$j: D \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ を canonical embedding とする．$\bar{D}$ を D と dual な compact Hermitian symmetric space とする．$k: \mathbb{C}^n \hookrightarrow \bar{D}$ なる embedding で $k \circ j: D \hookrightarrow \bar{D}$ が所謂 Borel embedding となるようなものが存在する．さらに $\bar{D}$ の上の ample line bundle L で $\bar{D}$ の second cohomology group $H^2(\bar{D}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の generater になっているものが存在する．$\dim \Gamma(\bar{D}, L) = N+1$，とし $\bar{D}$ の L に

よる$\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$への embedding を $l:\overline{D}\hookrightarrow\mathbb{P}^N$ とする．この l も canonical embedding と呼ばれている．

さて$\mathbb{P}^N$の hyperplane Hで　$l^{-1}(H)=H\cap\overline{D}=k(\mathbb{C}^n)$ となるものがある．$p:\mathbb{A}^{N+1}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{P}^N$ を canonical projection とする．このとき holomorphic map $F:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{A}^{N+1}-\{0\}$ を次の diagram を可換にするように構成する．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "k"'] & \mathbb{A}^{N+1}-\{0\} \arrow[d, "p"] \\ \overline{D} \arrow[r, hook, "l"'] & \mathbb{P}^N \end{tikzcd}$$

Fは$\mathbb{C}^n$から$\mathbb{A}^{N+1}-\{0\}$への polynomial map でさらに，$F(\mathbb{C}^n)\cap p^{-1}(H)=\phi$となるように定めることができる．(座標で書くと $\mathbb{A}^{N+1}=\mathbb{C}^{N+1}$の座標を適当にとると，$z\in\mathbb{C}^n$　$F(z)=(F_0(z),F_1(z),\cdots,F_N(z))$ とするとき $F_0(z)=\text{constant}\neq 0$，$F_i(z)$ は z の polynomial にすることができ，Hは $\mathbb{A}^{N+1}$の点の座標を$(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_N)$とするとき，$\xi_0=0$で定まる超平面である) Fは up to constant multiplication で一意に定まる．

ところでGを$\overline{D}$の双正則自己同型群のなす Lie群の連結成分とする．Gは複素Lie群になることが知られている．$\overline{D}$の同型は$\mathbb{P}^N$の linear transformation から induce されることが知られている．よって表現 $\rho:G\hookrightarrow PGL(N)$ が構成できる．$\pi:SL(N+1)\longrightarrow PGL(N)$ を canonical projection とする．$\overline{G}=\pi^{-1}(\rho(G))$ とする．Lにはよく知られているように$\overline{G}$ linearlization が入る．つまりLに$\overline{G}$が act してそれは$\overline{G}$の$\overline{D}$上の action と，projection $L\longrightarrow\overline{D}$によって compatible に

なるものがあるということである。さてKを$\overline{D}$のcanonical bundleとすると、Kは自然なG-linearizationをもち、よって自然な$\overline{G}$ linearizationをもつ。Severiの定理と$\overline{G}$のalgebraic characterがすべてtrivialということより、Kと$(L^*)^{\otimes M}$が$\overline{G}$-linearized line bundleとして同型なことがわかる。(ここでL^*はLのdual bundle，Mは適当な自然数)

nを上のnとする。UとVを$\mathbb{C}^n$のopen domainsとする。fをUからVへのholomorphic local isomorphismとする。J(f)をfのJacobianとする。これはU上の函数と見做す。Uのcoordinateを(u_i) $(1\leq i\leq n)$とする。Fを先に考えたmorphismとする。FをVに制限したものもFと書き、F_j $(0\leq j\leq N)$を上と同じくFの座標成分とする。U上の函数

$$\varphi_j(u) \overset{def}{=} J(f)^{-\frac{1}{M}}\cdot F_j(f(u)) \qquad (u\in U,\ 0\leq j\leq N)$$

を考える。ここで$J(f)^{-\frac{1}{M}}$はU上の　多価函数と考えるか、あるいはUを小さく取りなおして1つの分枝をとることにする。

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$をmulti-indexとし $\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u_1^{\alpha_1}\cdots\partial u_n^{\alpha_n}}$ $(|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n)$ とする。$(\alpha^{(0)},\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)})$をmulti-indexの長さ$N+1$の列とする。

これに対し、$A=(\alpha^{(0)},\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)})$とするとき

$$S_A(u;f)\overset{def}{=}\det\left(\frac{\partial\varphi_j(u)}{\partial\alpha^{(i)}}\right)$$

と定める。$S_A(u,f)$はU上で1のM乗根だけ不定な多価函数で

ある．

さて V' をもう一つの $\mathbb{C}^n$ の open domain とする．$f' : U \to V'$ を holomorphic local isomorphism とする．更に $f' \circ f^{-1} : V \longrightarrow V'$ は $G = \mathrm{Aut}^0(\bar{D})$ の $\mathbb{C}^n$ に induce する．双有理変換の V への制限になっているとする．

すると

<u>定理 1</u>；$S_A(u; f) = S_A(u; f')$ up to multiplication M-th root of unity

Γ を D に act する arithmetic discontinuous group とする．$n = \dim D$ であった。$\Phi_1(z), \Phi_2(z), \cdots \Phi_n(z)$ を独立な Γ に属する automorphic function とする。$D \underset{j}{\subsetneq} \mathbb{C}^n$ による z の coordinate を $z = (z_i)\ (1 \leq i \leq n)$ とする．$D \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}^n$，$\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z), \cdots, \Phi_n(z))$ の逆写像を f とする．f は無限多価．しかしこれを z の函数とみてやると

<u>系</u>；$S_A(u; f)$ は up to multiplication of M-th root of unity で Γ-invariant．

定理 1 の系として容易に

<u>定理 2</u>，$f : U \to V$ が G の element の U への制限になっているとする．すると $S_A(u; f)$ はすべて constant である．

（この constant は有限個の A 以外は 0 になる）

<u>Remark</u> 定理 2 の逆も特殊な場合いえている．

（終）